Przestrzenie metryczne

— — —

Proszę zapisać matematycznie, uzasadnić i zapamiętać poniższe stwierdzenia.

1. Operacja przeciwobrazu przez funkcję jest odporna na:

(i) dowolnie długą sumę[(i)] zbiorów[(ii)],
(ii) dowolnie długie przecięcie zbiorów,
(iii) dopełnienie[(iii)] i różnicę zbiorów
(iv) zawężenie funkcji[(iv)]

2. Operacja obrazu jest odporna na to samo, co przeciwobrazu **o ile funkcja jest injekcją**. Dla funkcji nieinjektywnych

(i) nadal działa odporność na dowolnie długie sumy,

ale odporność na przecięcie i różnicę robi się jednostronna[(v)]:

(ii) $f\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f(A)$,
(iii) $f(A \setminus A') \supset f(A) \setminus f(A')$

Proszę podać przykłady na brak inkluzji w drugą stronę dla funkcji nieinjektywnych.

3. Złożenie operacji obrazu i przeciwobrazu daje następujące inkluzje[(vi)]:

(i) $f^{-1}(f(A)) \subset A$, równość przy **injektywności**,
(ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, równość przy **surjektywności**. Właściwie to nawet $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

Proszę podać kontrprzykłady na braki inkluzji w drugą stronę.

4. Dopełnienie sumy to przecięcie dopełnień i na odwrót.

— — —

Metryka/odległość na zbiorze X to funkcja $d : X \times X \mapsto [0, \infty)$,

(I) która zeruje się na parach postaci (x, x) i żadnych innych[(vii)],
(II) w której zmiana kolejności argumentów nie zmienia wartości
(III) i która spełnia nierówność trójkąta[(viii)].

Mówimy, że **ciąg** $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$ **jest zbieżny do** $x \in X$ (w metryce d) jeśli odległości x_n od x dążą do 0. Mówimy, że $x \in X$ jest **punktem skupienia zbioru** $A \subset X$ jeśli spośród elementów $A \setminus \{x\}$ można wybrać ciąg zbieżny do x.

Kula otwarta $B(x, r)$ o środku w $x \in X$ i promieniu $r > 0$ to te punkty przestrzeni X, które są odległe od x o mniej niż r. **Kula domknięta** $\bar{B}(x, r)$ dopuszcza jeszcze punkty odległe dokładnie o r.

Zbiór $U \subset X$ **jest otwarty**, jeśli razem z punktem x leżącym w U w zbiorze U jest jeszcze zawarta pewna[(ix)] kula otwarta o środku w tym punkcie. Do **wnętrza zbioru** $A \subset X$ (oznaczanego $\operatorname{int} A$) należą te punkty a, które leżą w A wraz z pewną kulą otwartą.

Zbiór $C \subset X$ **jest domknięty**, jeśli każdy punkt leżący poza C leży tam wraz z pewną kulą otwartą (o środku w tym punkcie). Do **domknięcia zbioru** $A \subset X$ (oznaczanego $\overline{A} = \operatorname{cl} A$) należą te punkty x, dla których dowolna[(x)] kula otwarta o środku w x zahacza o A[(xi)]. **Brzeg zbioru** A (oznaczany $\partial A = \operatorname{Fr} A =$

(i) tzn. zbiór indeksów tej sumy jest dowolnej liczności, mamy na myśli operację $\bigcup$, nie $\cup$

(ii) "odporna na" znaczy, że suma przeciwobrazów jest przeciwobrazem sumy itp.

(iii) dla zbioru A leżącego w "zbiorze-wszechświecie" X będziemy je oznaczać jako $X \setminus A = \setminus A = A^c$

(iv) czyli przeciwobraz przez zawężenie funkcji do jakiegoś zbioru jest śladem przeciwobrazu na tym zbiorze

(v) $X, Y, A \subset X, A' \subset X$ - zbiory, $\mathcal{A}$ - rodzina zbiorów w X, $f : X \mapsto Y$ - funkcja

(vi) $A \subset X, B \subset Y$ - zbiory, $f : X \mapsto Y$ - funkcja

(vii) i jest nieujemna, ale to już mamy zagwarantowane linijkę wyżej

(viii) odległość pomiędzy dwoma punktami jest niewiększa niż suma odległości tych punktów od jakiegokolwiek trzeciego

(ix) najlepiej myśleć, że bardzo mała

(x) lepiej myśleć *dowolnie mała*

(xi) czyli przecina się niepusto z A

bd A) stanowią te punkty x, dla których dowolna kula otwarta o środku w x zahacza zarówno o A jak i jego dopełnienie.

Para (X, τ) **jest przestrzenią topologiczną**[xii] gdy rodzina zbiorów otwartych[xiii] $\tau \subset 2^X$ spełnia **aksjomaty przestrzeni topologicznej**:

(I) zbiór pusty i cała przestrzeń są otwarte,

(II) zbiory otwarte są odporne na dowolnie długie sumy[xiv]

(III) zbiory otwarte są odporne na skończone przecięcia.

Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem przestrzeni topologicznej (X, τ), to na A jest naturalna **topologia indukowana z** X dana poprzez ślady oryginalnej topologii na zbiorze A:

$$\tau|_A := \{A \cap U, U \in \tau\}.$$

Odwzorowanie $f : X \mapsto Y$ pomiędzy dwiema przestrzeniami metrycznymi nazywamy **ciągłym w punkcie** $x^* \in X$, jeśli do wewnątrz[xv] *dowolnej* kuli otwartej w przeciwdziedzinie o środku w $f(x^*)$ da się przerzucić *jakąś* kulę otwartą z dziedziny o środku w x^* przy pomocy odwzorowania f.

— — —

Proszę uzasadnić poniższe stwierdzenia o przestrzeni metrycznej X.

5. Kula otwarta jest zbiorem otwartym, a domknięta - domkniętym.

6. Przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną[xvi].

7. Jeśli zamienić w aksjomatach przestrzeni topologicznej miejscami słowa *suma* i *przecięcie*, to spełnia je rodzina zbiorów domkniętych.

8. Dopełnienie zbioru otwartego jest domknięte, a domkniętego - otwarte.

9. Wnętrze A to suma wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A[xvii]. To również suma wszystkich kul otwartych o środkach w $x \in A$ zawartych w A.

10. Domknięcie A to przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A[xviii].

11. Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę. Każdy podciąg tego ciągu jest do niej zbieżny[xix].

12. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

13. Operacje wnętrza i domknięcia spełniają $\operatorname{int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$ oraz $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$.

14. Zbiór jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy jest równy swojemu domknięciu. To samo zachodzi dla otwartych i wnętrza.

15. Brzeg zbioru to przecięcie domknięcia i domknięcia dopełnienia zbioru. To również domknięcie z usuniętym wnętrzem.

16. W definicjach zbioru otwartego i zbioru domkniętego kule mogą być domknięte i wyjdzie na to samo.

17. Zbiór domknięty to taki, który zawierając ciąg zbieżny zawiera jego granicę.

18. Cofanie[xx] zbiorów z przeciwdziedziny do dziedziny przy pomocy funkcji ciągłej zachowuje własności otwartości oraz domkniętości. Ale przerzucanie z dziedziny do przeciwdziedziny już niekoniecznie - proszę podać przykłady.

19. Funkcja f ciągła w $x \in X$ przerzuca ciągi zbieżne do x na ciągi zbieżne do $f(x)$[xxi].

20. Brzeg i wnętrze zbioru A są rozłączne oraz w sumie stanowią domknięcie A. Ponadto A leży pomiędzy swoim wnętrzem i swoim domknięciem: $\operatorname{int} A \subset A \subset \overline{A}$.

[xii] będziemy często mówić tylko o X, tak samo w przypadku przestrzeni metrycznych X zamiast (X, d)

[xiii] inaczej *topologia*; tak będziemy je nazywać, natomiast definiujemy je arbitralnie

[xiv] tzn. suma otwartych jest otwarta

[xv] nie mylić z *do wnętrza*, "wewnątrz" oznacza tutaj po prostu podzbiór

[xvi] ale nie na odwrót

[xvii] a zatem w pewnym sensie największy zbiór otwarty zawarty w A

[xviii] a zatem w pewnym sensie najmniejszy zbiór domknięty zawierający A

[xix] niekoniecznie prawda w przypadku przestrzeni topologicznych

[xx] czyli przerzucanie przy pomocy operacji przeciwobrazu

[xxi] innymi słowy jest *ciągowo ciągła*

Kilka zadań na rysowanie obrazków i wyrabianie intuicji

— — —

Proszę określić czy następujące zbiory są otwarte, domknięte lub ograniczone oraz wyznaczyć ich wnętrze, domknięcie i brzeg.

21.

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y=\sin\frac{1}{x}\right\}$$

jako podzbiór $\mathbb{R}^2$.

22.

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \exists_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} : 0<x\leqslant n \wedge y=\frac{1}{n}\right\}$$

jako podzbiór a) $\mathbb{R}^2$, b) $\mathbb{R}\times(0,\infty)$.

23.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(2^{-n}, 2^{-(n+1)}\right)$$

jako podzbiór $\mathbb{R}^2$.

24.

$$\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}\times(-|x|,|x|)$$

jako podzbiór $\mathbb{R}^2$.

25.

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \exists_{r\in\mathbb{Q}} : 1\leqslant|r|<2 \wedge x=y=\sqrt{2}r\right\}$$

jako podzbiór a) $\mathbb{R}^2$, b) zbioru $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\}$.

26.

$$\bigcup_{x\in\mathbb{Q}\cap(0,1)} \left\{\sqrt{2}x^2\right\}$$

jako podzbiór $\mathbb{R}$.

27.

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x,y\leqslant 10 \wedge x+y+xy=1\right\}$$

Jako podzbiór a) $\mathbb{R}^2$, b) $[0,10]\times[0,10]$.

28.

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x,y<10 \wedge x^2+y+xy<1\right\}$$

Jako podzbiór a) $\mathbb{R}^2$, b) $(0,10)\times(0,10)$.

Przestrzenie topologiczne

— — —

Aksjomaty oddzielania[(xxii)]:

- $\boldsymbol{T_0}$: dla każdej pary różnych punktów da się oddzielić pierwszy od drugiego lub drugi od pierwszego:
$$\forall_{x,y\in X}\,(x\neq y\Rightarrow \exists_{U\in\tau}(x\in U\wedge y\notin U)\vee(x\notin U\wedge y\in U))$$
- $\boldsymbol{T_1}$: dla każdej pary różnych punktów da się oddzielić pierwszy od drugiego:
$$\forall_{x,y\in X}\,(x\neq y\Rightarrow \exists_{U\in\tau}(x\in U\wedge y\notin U))$$
- $\boldsymbol{T_2}$: każde dwa różne punkty da się od siebie oddzielić równocześnie:
$$\forall_{x,y\in X}\,(x\neq y\Rightarrow \exists_{U,V\in\tau} x\in U\wedge y\in V\wedge U\cap V=\emptyset)$$

29. Uzasadnij, że w definicji aksjomatu T_1 można wpisać "da się oddzielić zarówno pierwszy od drugiego jak i drugi od pierwszego". Jak wygląda matematyczny zapis?

— — —

Określ które aksjomaty oddzielania spełniają poniższe topologie na zbiorze X.

30. *Topologia antydyskretna.*
$$\tau=\{\emptyset,X\}.$$
31. *Topologia dyskretna.*
$$\tau=2^X.$$
32. *Topologia koskończona.*
$$\tau=\{A\subset X : X\setminus A \text{ jest zbiorem skończonym}\}\cup\{\emptyset\}.$$
33. *Topologia Sierpińskiego.*
$$X=\{0,1\},\qquad \tau=\{\emptyset,\{0\},X\}.$$
34. *Topologia wyróżnionego punktu.*
$$\tau=\{A\subset X : *\in A\}\cup\{\emptyset\},$$
gdzie $*\in X$.

35. Topologia zadana przez jakąkolwiek metrykę.

36. *Topologia prawych odcinków.* $X=\mathbb{R}$,
$$\tau=\{(a,\infty) : a\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}.$$

— — —

37. Niech x będzie elementem przestrzeni topologicznej (X,τ). Oznaczmy przez $\tau(x)$ rodzinę wszystkich zbiorów otwartych zawierających x:
$$\tau(x)=\{U\in\tau : x\in U\}.$$
Powiemy, że dwa punkty x' i x'' są *topologicznie nierozróżnialne* jeśli $\tau(x')=\tau(x'')$. Pokaż, że przestrzeń spełnia aksjomat T_0 wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa różne punkty są topologicznie rozróżnialne.

38. Pokaż, że przestrzeń spełnia aksjomat T_1 wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\bigcap\tau(x)=\{x\}.$$
39. Pokaż, że przestrzeń spełnia aksjomat T_1 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie singletony są domknięte.

40. Pokaż, że topologia jest dyskretna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy singleton jest otwarty.

[(xxii)] X - zbiór, τ - topologia na tym zbiorze

41. Niech $\{\tau_s : s \in S\}$ będzie rodziną topologii na zbiorze X. Pokazać, że topologią jest również przecięcie tej rodziny.

Topologią generowaną przez pewną rodzinę zbiorów $\mathcal{A} \subset 2^X$ nazywamy najmniejszą topologię zawierającą tę rodzinę:[(xxiii)]

$$\bigcap \{\tau \subset 2^X : \mathcal{A} \subset \tau \text{ i } \tau \text{ jest topologią na } X\}$$

42. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Która spośród poniższych rodzin zbiorów jest topologią? Jeśli nie jest, to jak wygląda topologia generowana przez tę rodzinę? Które aksjomaty oddzielania spełnia? Jeśli któregoś nie spełnia, to które punkty w X są za to odpowiedzialne?

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,6\}, \{2,6\}, \{1,2,6\}\},\\
\tau_2 &= \{\emptyset, X, \{1,2,6\}, \{1,2,4\}, \{1,2,4,6\}\},\\
\tau_3 &= \{\emptyset, X, \{6\}, \{5,6\}, \{1,6\}\},\\
\tau_4 &= \{\emptyset, X, \{2\}, \{3\}, \{2,4,5\}, \{2,3,4,5\}\},\\
\tau_5 &= \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,4,5\}, \{1,2,4\}, \{1,2,4,5\}\},\\
\tau_6 &= \{\emptyset, X, \{2\}, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{2,4,5,6\}\}.
\end{aligned}$$

43. Uzasadnij, że poniższe rodziny są topologiami na $\mathbb{R}$. Które punkty są w nich topologicznie nierozróżnialne od siebie?

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\},\\
\tau_2 &= \{[-n,n] : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\},\\
\tau_3 &= \{[n,\infty) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

44. Uzasadnij, że poniższe rodziny są topologiami na $\mathbb{N}$. Które aksjomaty oddzielania spełniają?

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{\{0,\dots,n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\},\\
\tau_1 &= \{\{n, n+1, \dots\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\},
\end{aligned}$$

45. Wyznacz wszystkie topologie na $\{0,1\}$ oraz $\{0,1,2\}$.

— — —

Funkcja $f : X \mapsto X'$ jest ciągła[(xxiv)] w $x \in X$, gdy do dowolnego otoczenia $f(x)$ da się przerzucić pewne otoczenie x przy pomocy f[(xxv)]:

$$\forall_{U' \in \tau'(f(x))} \exists_{U \in \tau(x)} f(U) \subset U'.$$

Funkcja f jest homeomorfizmem jeśli f^{-1} istnieje i obie są ciągłe.

46. Pokaż, że funkcja jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte.

47. Niech $X = \{0,1\}$ i niech τ_i będą topologiami wyróżnionych punktów ($i = 0,1$). Pokaż, że funkcja $f : (X, \tau_0) \mapsto (X, \tau_1)$ zadana przez $f(0) = 1, f(1) = 0$ jest homeomorfizmem.

48. Podaj przykład funkcji, która jest ciągła i odwracalna, ale której odwrotna nie jest ciągła.

49. Pokaż, że $\mathbb{R}$ i $(0,1)$ z topologiami euklidesowymi[(xxvi)] są homeomorficzne.

50. Pokaż, że następujące cztery przestrzenie topologiczne są ze sobą homeomorficzne:

$$A = \{2^{-n}, n = 1,2,\dots\} \cup \{0\}, \qquad B = \left\{\frac{1}{n}, n = 1,2,\dots\right\} \cup \{0\},$$

$$C = B \setminus \{1\}$$

(xxiii) Dzięki poprzedniemu zadaniu wiemy, że topologia generowana rzeczywiście jest topologią.

(xxiv) (X,τ) oraz (X',τ') są tutaj przestrzeniami topologicznymi

(xxv) jest to odpowiednik epsilonowo-deltowej definicji z przestrzeni metrycznych

(xxvi) czyli naturalnymi, pochodzącymi od naturalnej metryki na $\mathbb{R}$

z topologiami euklidesowymi i

$$D = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

z topologią generowaną przez rodzinę

$$\mathcal{D} = \{\emptyset\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, \ldots\} \cup \{\infty\} : n \in \mathbb{N}\}$$

51. Czy topologia euklidesowa na A z poprzedniego zadania i topologia wyróżnionego punktu 0 to te same topologie?

52. Niech $f : X \mapsto Y$ będzie homeomorfizmem pomiędzy dwiema przestrzeniami topologicznymi. Pokaż, że X spełnia jakiś aksjomat oddzielania wtedy i tylko wtedy, gdy Y go spełnia.

Zwartość

— — —

Przestrzeń metryczna (X, d) jest *zwarta*, jeśli z każdego pokrycia otwartego tej przestrzeni da się wybrać podpokrycie skończone:

$$\forall_{\mathcal{U}\subset\tau\wedge\bigcup\mathcal{U}=X}\exists_{N\in\mathbb{N},U_1,\dots,U_N\in\mathcal{U}}\bigcup_{j=1}^{N}U_j = X.$$

53. Każda przestrzeń metryczna zwarta jest także *ciągowo zwarta*: z każdego ciągu elementów tej przestrzeni da się wybrać podciąg zbieżny.

54. Każda przestrzeń zwarta jest ograniczona.

55. W każdej przestrzeni zwartej można znaleźć przeliczalny zbiór gęsty.(xxvii) Podaj przykład, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi.

56. Podzbiór X przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (z metryką indukowaną) jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

57. Kiedy przestrzeń dyskretna jest zwarta?

58. Przestrzeń homeomorficzna z przestrzenią zwartą jest zwarta.

59. Obraz przestrzeni zwartej przez funkcję ciągłą jest zwarty.

60. Funkcja $f : X \mapsto \mathbb{R}$ przy X zwartej osiąga swoją wartość najmniejszą i największą.

61. Każdy zwarty podzbiór przestrzeni zwartej jest w niej domknięty.

62. Każdy domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty.

63. Przecięcie przeliczalnej rodziny niepustych zbiorów zwartych $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ spełniającej $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$ jest niepuste (i zwarte).

64. Iloczyn kartezjański $X \times Y$ dwóch przestrzeni zwartych jest zwarty.(xxviii)

65. Jeśli A jest domkniętym podzbiorem przestrzeni zwartej X, to X/A jest przestrzenią zwartą.

(xxvii) Zbiór A jest gęsty w przestrzeni metrycznej X gdy $\bar{A} = X$. Przestrzenie, w których można znaleźć przeliczalny zbiór gęsty nazywamy *ośrodkowymi*.

(xxviii) Topologię rozumiemy tu jako zadaną przez bazę utworzoną z iloczynów $X_i \times Y_j$, gdzie czynniki są elementami pewnych baz X oraz Y lub (równoważnie) daną przez metrykę $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$.

Spójność

— — —

Przestrzeń topologiczną nazywamy *niespójną* jeśli można ją przedstawić jako sumę dwóch zbiorów *otwartych* i *rozłącznych*. Przestrzeń jest *spójna* jeśli nie jest niespójna.
Przestrzeń X jest *drogowo spójna* jeśli każde dwa punkty $x, x' \in X$ da się połączyć drogą (ciągłym odwzorowaniem $\gamma : [0,1] \mapsto X$ takim, że $\gamma(0) = x, \gamma(1) = x'$), a *łukowo spójna* jeśli da się je połączyć łukiem (drogą, która dodatkowo jest homeomorfizmem na obraz(xxix)).

— — —

66. Łukowa spójność $\Rightarrow$ drogowa spójność $\Rightarrow$ spójność.
67. Drogowa spójność + T2 $\Rightarrow$ łukowa spójność.
68. Spójność + skończoność przestrzeni $\Rightarrow$ drogowa spójność.
7 **69.** Podać przykłady na braki implikacji w drugą stronę w zadaniu 1.
70. Przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, kiedy nie posiada żadnych podzbiorów otwarto-domkniętych poza trywialnymi (tj. $\emptyset$ i X).
71. Obraz przestrzeni spójnej przez odwzorowanie ciągłe jest spójny.
72. Niech $\{C_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną zbiorów spójnych. Jeśli istnieje taki wskaźnik $s_* \in S$, że $C_s \cap C_{s_*} \neq \emptyset$ dla dowolnego $s \in S$, to $\bigcup_{s\in S} C_s$ jest spójna.

— — —

Składową spójną przestrzeni X nazywamy jej podzbiór, który nie posiada żadnego nadzbioru spójnego(xxx).

— — —

73. Dla punktu $x \in X$ składowa spójna zawierająca x to największy zbiór spójny zawierający x. Jest ona jednoznacznie określona.
74. Składowa spójna jest zbiorem domkniętym.
75. Czy przecięcie zbiorów spójnych musi być spójne?
76. Jeśli przestrzeń metryczna (X, d) jest spójna, to dla każdej pary punktów $x, x' \in X$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki skończony ciąg punktów $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x'$, że $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ dla $i = 0, \dots, n-1$. Czy jakaś przestrzeń niespójna ma tę własność? Jaki jest przykład przestrzeni niespójnej bez tej własności?
77. Czy zbiory A, B i C są spójne/łukowo spójne?

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0\right\} \cup \{0\} \times [-1,1]$$

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = nx\right\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ny = x^2\right\} \cup \mathbb{R} \times \{0\}.$$

78. Jeśli $f : X \mapsto Y$ jest homeomorfizmem, to dla dowolnego $x \in X$ przestrzenie $X \setminus \{x\}$ oraz $Y \setminus \{f(x)\}$ są homeomorficzne.
79. Jeśli X i Y są homeomorficzne, to mają tyle samo spójnych składowych. W szczególności albo obie są spójne, albo żadna z nich nie jest spójna.
80. Przestrzenie $I = [0,1]$ oraz $T = [-1,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1,0]$ (z naturalnymi topologiami) nie są homeomorficzne.
81. Czy $\mathbb{Q}$ jest spójne? Jeśli nie, to jakie ma składowe spójne?

(xxix) zawężenie γ w przeciwdziedzinie do $\gamma([0,1])$, tj. takie $\tilde{\gamma} : [0,1] \mapsto \gamma([0,1])$, że $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)$ jest homeomorfizmem
(xxx) oprócz samego siebie